



# Los cuasicristales y la conjetura de Kepler en el aula, taller manual a distancia

**Astron Martínez**

Facultad de Química, UNAM. Circuito escolar S/N, Ciudad Universitaria, Coyoacán, CDMX 04510 México  
[astronr@gmail.com](mailto:astronr@gmail.com)

Todo se reduce a hallarle orden al universo. La aparente regularidad del mundo y su falsa certeza nos permiten dormir más tranquilos por las noches o qué sé yo. Se trata de una utopía habitada por órbitas planetarias definidas, figuras geométricas regulares, sonidos armónicos resonantes, especies biológicas bien delimitadas que caben en un solo orden taxonómico... Pensar que el universo está ordenado de forma regular es definitivamente más inteligible que concebirlo caótico, impredecible, no periódico y que se rehúsa a ceñirse a modelos estáticos. Apenas lo entendimos el siglo pasado. Una y otra vez vimos desafiados los cánones y las regularidades durante todo el siglo XX. Guiños de estas ideas podemos encontrarlos en:

*La mecánica cuántica, termodinámica estadística, música concreta, arte moderno y contemporáneo en la pintura, el descubrimiento de los priones y retrovirus, los fractales, estudios de turbulencia, dinámicas sociales, guerra de guerrillas, danza moderna, arquitectura brutalista, estudios de la complejidad y el caos o la fisicoquímica fuera de los estados de equilibrio.*

Yo propongo que los recientemente descubiertos cuasicristales (junto con los fractales, tal como lo escribí en el número 36 de esta revista MA-IIM [1]) vinieron a derrumbar a las geometrías divinas, las proporciones áureas y los cánones estéticos clásicos. Pero antes de llegar a eso, comencemos con lo básico.

## La desobediencia de los cuasicristales

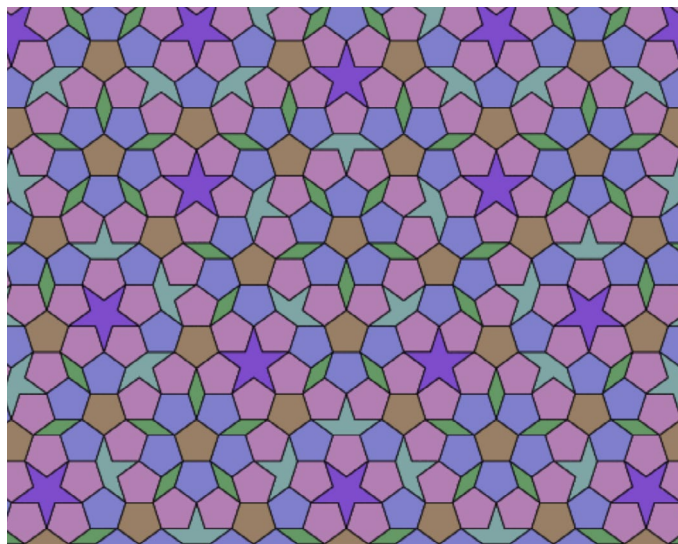
En geometría aprendimos que hay figuras regulares. Dicha perfección estética sedujo a los pensadores de la antigüedad (basta recordar a Euclides o admirar las ruinas prehispánicas mesoamericanas) y también sedujo al astrónomo alemán del siglo XVI Johannes Kepler, quien estaba obstinado por hallar sólidos platónicos (cubos, tetraedros, icosaedros, octaedros y dodecaedros) dentro de la mecánica celeste y las órbitas planetarias. No los iba a encontrar nunca, pero en su búsqueda por la *perfección regular* propuso algunas ideas que apenas empezamos a entender, ayudados de las matemáticas modernas y los cuasicristales.

Todas las ciencias naturales y exactas siguieron, obedientes, a la geometría. El conocimiento humano y la técnica se encargaron

de buscar patrones y regularidades donde no necesariamente podíamos encontrarlos. El paradigma de la ciencia occidental pre-moderna era, pues, determinista, positivista, muy ordenado y sobre todo, regular.

La química del estado sólido, mineralogía y cristalografía de rayos X proponen “celdas unitarias”. Estas representan ordenamientos atómicos regulares materializados en geometrías tridimensionales bien definidas, e inamovibles, con todas las geometrías posibles –o al menos eso era lo que creíamos–. Se supone que todo lo que fuera cristalino (cristales, en contraposición con los sólidos amorfos) debería poder acomodar sus átomos siguiendo estos planos estructurales o recetas. Así, la arquitectura de los diferentes arreglos atómicos posibles dentro de los cristales solo podía ser concebida como celdas unitarias que se repiten una y otra vez hasta el infinito. Como los hacen los panales de las abejas en una colmena o las baldosas de los pisos y azulejos, se tratan de estructuras básicas y unitarias que pueden ocupar la enteridad de un plano, sin dejar espacios vacíos y repitiéndose hasta la eternidad. ¿Existen más formas de rellenar el espacio?

La imagen que vemos arriba parecería entrar en esta categoría. Se ve *muy ordenado* y bastante regular, pero es todo lo contrario. Si continuáramos este patrón, expandiendo la figura mediante un algoritmo específico investigado por Roger Penrose en la década de 1970, descubriríamos una “teselación” o mosaico con un diseño único que nunca llega a repetirse del todo. ¡Nunca se repite! Un segmento es similar a otro (y podrán parecerse mucho) pero cada sección de aquí al infinito es única e irreducible, pues se trata de un patrón único e infinito [2]. Por eso no existe una celda unitaria (que podamos



repetir una y otra vez) para recrearlo. Eso es, básicamente, un cuasicristal. Átomos desobedientes que están ordenados siguiendo estas exóticas geometrías.

## Desarrollo del taller manual

*Título o nombre del taller: Cuasicristales y la conjetura de Kepler.*

### Objetivos generales:

Comunicar contenido científico relacionado con los cuasicristales y la conjetura de Kepler mediante una actividad manual que utiliza bocetos originales de este conocido astrónomo.

### Objetivos particulares:

Desarrollo de la motricidad fina [3]; visibilizar el premio Nobel de química de 2011 y su equivalente en el área de las matemáticas; mostrar que la ciencia no es estática y que está en constante revisión, construcción y escrutinio; convergencias entre ciencia y arte; transferencia de tecnología; apreciación artística y creatividad manual.

### Público objetivo:

Alumnado de nivel medio y medio superior. Ajustando la profundidad del contenido

científico comunicado, este taller ha sido adaptado exitosamente para estudiantes universitarios de carreras científicas.

### Origen:

Diseñé este taller para poder tomarlo de forma remota durante los tiempos de pandemia por Covid-19 en 2021. En ese año, el evento de divulgación científica más concurrido del país, Noche de las Estrellas, conmemoró los 450 años del natalicio de Johannes Kepler “Armonía y revolución”. Específicamente, realicé este taller para la sede de Morelia, Michoacán, coordinada por el Instituto de Radioastronomía y Astrofísica de la UNAM (el IRyA). Este taller se transmitió en vivo a través de redes sociales y la grabación aún puede consultarse [4], al igual que los materiales imprimibles necesarios para su ejecución.

Duración: De 30 a 60 minutos.

### Materiales:

Imprimibles o fotocopias en blanco y negro del taller (son dos hojas tamaño carta con orientación vertical impresas por un solo lado; se incluyen al final de este artículo). Tijeras. Lápiz con borrador. Lápices de colores o plumones. Lápiz adhesivo o pegamento.

### Procedimiento:

1. Tan pronto como se aproximan las personas interesadas en tomar el taller, se les proporcionan ambas fotocopias y se les indica que sigan las instrucciones de la primera hoja (colorear y recortar las figuras geométricas). Este tiempo puede aprovecharse para que la persona tallerista se instale y pruebe el equipo electrónico (en caso de que decida utilizar apoyo audiovisual), para acomodar el espacio de trabajo, indicar dónde tirar la basura generada (restos de

papel recortado) y para captar más público (o esperar el tiempo de tolerancia para el público cautivo).

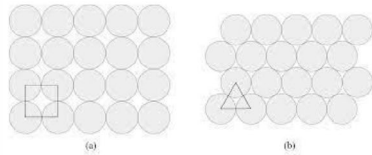
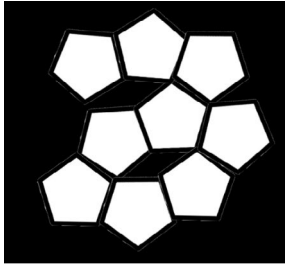
2. La siguiente indicación es pegar las figuras geométricas que ya fueron recortadas. Esto se hará en la parte de atrás de la segunda hoja de trabajo, en bloques que contengan un solo tipo de figura y siguiendo la indicación de “dejar la menor cantidad de espacios vacíos posibles”. De esta forma, ordenarán las nueve piezas de cada tipo de figura.



3. Con lo anterior se pueden clasificar en “figuras obedientes” o “figuras bellas” a aquellas que permiten un arreglo teselar tal que ocupe todo el espacio disponible en un plano sin dejar espacios vacíos entre ellas. Los triángulos, cuadrados, paralelogramos y hexágonos pueden hacerlo sin problema. Los pentágonos y círculos no pueden hacerlo, así que serán las “figuras desobedientes”. En la búsqueda por intentar acomodar pentágonos y círculos de la mejor manera posible, las grandes mentes pensadoras de la antigüedad hicieron predicciones científicas que son muy útiles en la actualidad.

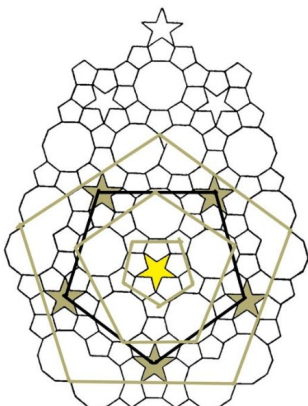
4. Entre tantas formas en las que se pueden acomodar a los círculos pueden distinguirse las dos que están ilustradas abajo. Todas las demás posibilidades son, en realidad, combinaciones de estos dos arreglos. La hoja recortable del taller contiene el doble de círculos que de las demás figuras, así que la persona tallerista tiene libertad de comunicar este contenido científico como mejor considere hacerlo, poniendo el ejemplo para que le sigan o haciendo una com-

petencia en la que se tengan dos intentos para mostrar creativos acomodos que el público asistente proponga. Este es un buen momento para hablar de la conjetura de Kepler (también puede ser reservado para hablarlo hasta el final [5]).



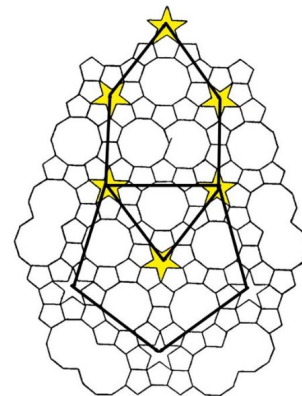
5. Es tiempo de pasar a la segunda fotocopia, aquella que muestra un boceto original publicado en 1619 por Johannes Kepler en su libro *Harmonices mundi*. Lo primero que hay que hacer es ubicar la estrella que se encuentra más próxima al centro de la figura y que está rodeada por cinco decágonos regulares. Esta será el eje imaginario (perpendicular al plano, pasando por el centro de la estrella) que utilizaremos como guía para rotar la figura.

6. La siguiente indicación consiste en ubicar pentágonos de diferentes tamaños que se encuentren implícitos en dicho boceto. Hay “pentágonos escondidos” por todo lados, empezando por el mencionado en el punto anterior y que tiene estrellas en cada uno de sus cinco vértices. ¿Cuántos puede el público asistente encontrar?



7. Con un poco de imaginación, también pueden ubicarse insinuaciones de hexágonos. La estrella superior y la primera estrella –que utilizamos de guía– son los extremos opuestos de un hexágono irregular que tiene por vértices a las otras cuatro estrellas interiores que quedan en el medio. Esto puede darnos una idea de lo que estaba pasando por la mente de Kepler al realizar esta figura con insinuaciones a hexágonos y pentágonos: “enseñarle” a una figura desobediente cómo comportarse de una manera periódica en un plano, asemejándose a ella. Una forma de “hexagonizar” un pentágono o de “pentagonizar” un obediente hexágono.

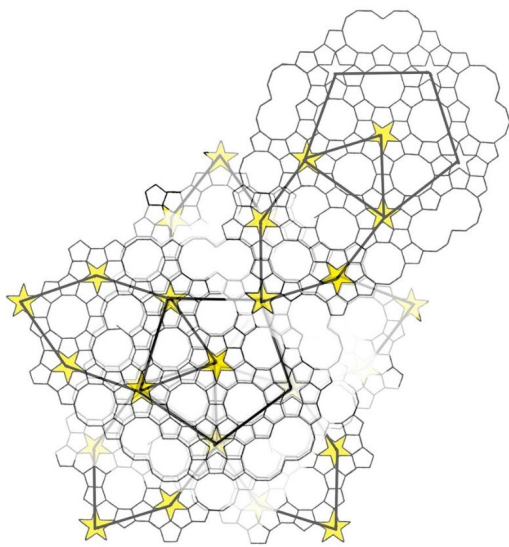
8. Se invita al público asistente a hallar tantas insinuaciones de estas figuras como puedan encontrar, abajo coloco un ejemplo de algunas de ellas (y las dos que utilizaremos para la siguiente indicación, que ya fueron descritas en los puntos anteriores).



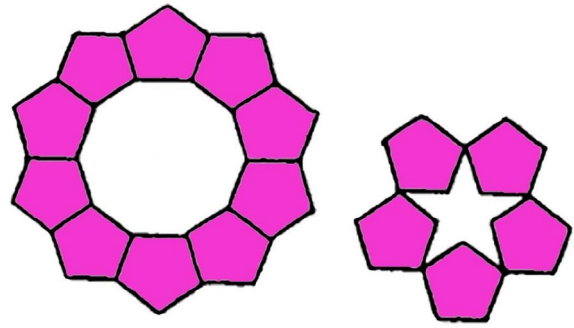
9. Es tiempo de rotar la imagen. Para apoyarnos en la explicación podemos hacer uso de otra figura previamente recortada, una ventana que dé a un exterior iluminado, una pantalla brillante o simplemente la imaginación. La tarea consiste en imaginar lo que resta de la figura (continuar la teselación en el plano completo de la hoja). Hay varias indicaciones que pueden seguirse para hacer más fácil esta tarea y una de ellas es,



justamente, colocar otra copia igual atrás de la hoja que estamos trabajando y calcar la parte deseada del dibujo. Puede rotarse cinco veces (tomando a la ya mencionada estrella que está en el eje) y en cada una de estas rotaciones coincidentes con el pentágono imaginario, prolongar el hexágono, tal como puede verse en la imagen de abajo. Después, basta con seguir utilizando a las “estrellas de referencia” como ejes para completar lo que falta de la imagen.

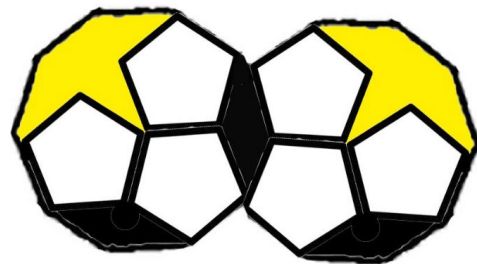


10. Otra forma posible de explicar cómo continuar con la teselación en toda la hoja consiste en rodear a todas las estrellas y decágonos con los pequeñísimos pentágonos regulares que se recortaron en la actividad anterior. Puede pedirle al público asistente que imagine esta indicación, pero también puede pedirles que lo recreen de forma física. Los pentágonos recortados para la primera actividad son del mismo tamaño que aquellos de la ilustración, por lo tanto, puede ponerlos físicamente arriba de su dibujo y darse una idea de cómo continuar con el patrón. La indicación es “rodear a todos los decágonos y estrellas con pentágonos; las demás figuras aparecerán solitas”.

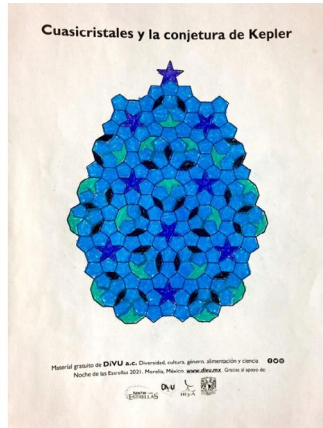
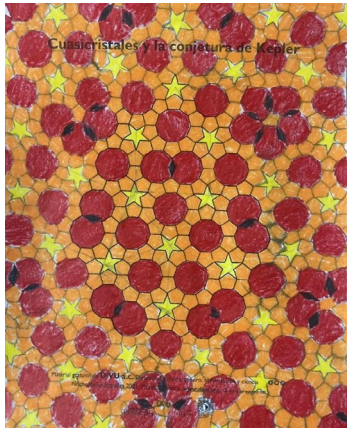


11. Una vez que hayan llenado toda la hoja, pueden dar por terminada la proyección de nuevos patrones o también puede añadir una complejidad mayor. Esta nueva complejidad consiste en “ir hacia adentro”, colocando más piezas en el interior de los decágonos.

12. En cada uno de los decágonos (incluyendo a los sobrepuestos, que asemejan unos anteojos) pueden acomodarse tres pentágonos en su interior. Pídale al público asistente que lo intente. Verá que el espacio entero puede ocuparse por tres pentágonos, dos rombos y un fragmento de estrella. Esta insinuación es visible en el boceto original de Kepler, que cuenta con un “error” o líneas que no borró en el medio de uno de los “anteojos” centrales. Si decide continuar estas iteraciones y dibujar estas tres figuras adentro de los decágonos resultará también en una teselación aperiódica infinita.



13. Similar a los libros para colorear mandalas, que tanto se pusieron de moda hace unos años, puede pedirle al público asistente que colorea sus teselaciones o mosaicos aperiódicos para así concluir con la parte manual de este taller.



### Cierre y evaluación:

Incluso dentro de las matemáticas y ciencias exactas podemos mostrar cuán valiosas son las *habilidades blandas* para la resolución de problemas prácticos. La destreza manual, talento artístico, sensibilidad creativa y capacidad de extrapolar información e improvisar van a destacar en este taller, y serán fácilmente ubicables entre el público asistente que siempre pensó que era “malo para las matemáticas”. Se alienta a mostrar que no todo en matemáticas son números y que quienes saben hacer cálculos mentales o cuentas rápidas no son necesariamente quienes logran hacer los mosaicos o teselaciones más bellos y libres de errores, o viceversa.

Aunque de alguna manera se predijeron desde hace cientos de años, las teselaciones aperiódicas y los cuasicristales fueron descubiertos formalmente por la ciencia en épocas mucho muy recientes. ¿Cuánta ciencia aún sin descubrir nos rodea en este mismo instante? Desde nuestra breve y mortal existencia humana, ¿podemos acceder al infinito? Estas son algunas de las preguntas detonantes que podemos plantear para incentivar el diálogo. Este tiempo también es utilizado para responder preguntas, véase [5, 2]; externar comentarios y sensaciones, y para terminar de iluminar la actividad manual.

Para nuestro acelerado ritmo de vida, pareciera una ociosidad y una pérdida de tiempo recortar y pegar diminutas figuritas de papel para probar que algunas de ellas pueden acomodarse de manera periódica o aperiódica y sin dejar espacios. No obstante, esta actividad manual contribuye a mejorar la motricidad fina en los dedos. También cobra relevancia en la era digital, pues desde hace algunos años sabemos que las infancias sobreexpuestas al uso indiscriminado de pantallas han perdido motricidad fina: “se ha detectado que los niños de 5-6 años no están desarrollando la motricidad fina debido al uso constante de artefactos tecnológicos, en definición, aparatos táctiles (...) es decir, el uso de pantallas táctiles entorpecen el buen desarrollo de la motricidad fina (...) así como la falta de capacitación permanente de los docentes” [3]. De esta forma, este taller rememora la infancia temprana, las manualidades del preescolar y las famosas actividades de “pinza con los dedos”: hacer bolitas de papel, pegar frijoles, pasar un estambre por los agujeros.

### De meteoritos a sartenes antiadherentes

Kepler no fue el primero ni el único. Hay numerosos ejemplos de mosaicos aperiódicos en la arquitectura islámica antigua [6], estos fueron elaborados por inteligentísimas personas artesanas y racionalizados por brillantes mentes matemáticas; nombres relegados por la ciencia occidental.

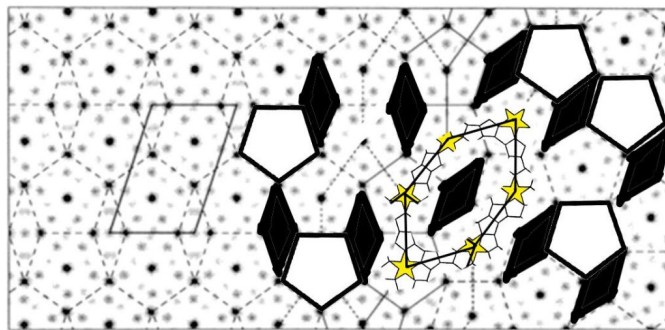
En los años 60 y 70 del siglo pasado se elucidaron las matemáticas necesarias para describir estas nuevas geometrías que desafiaban cómo ordenar un número finito de figuras en un plano, sin dejar espacios y creando patrones infinitos que no fueran periódicos. La más famosa es sin duda la

teselación de Penrose, que fue publicada en 1974 y tiene una simetría de orden cinco, guardando una estrecha relación con el boceto original de Kepler de 1619 [2].

A principios de los años 80, el científico de materiales Dan Shechtman notó patrones de difracción de rayos X de un tipo de cristales nunca antes vistos (similares a los patrones aperiódicos de Penrose), y para 1987 ya era posible sintetizar estos nuevos “cuasicristales” de manera artificial y que fueran térmicamente estables en bulto. Bastaron diez años para hallarles aplicaciones industriales y comerciales como recubrimiento de sartenes antiadherentes. Lo que reavivó su popularidad fue el premio Nobel de química de 2011, entregado a Shechtman. No fue hasta este siglo que comenzaron los intentos multinacionales por hallar materiales de estructura cuasicristalina en la naturaleza y en 2009 se confirmó la presencia de cuasicristales en minerales naturales formados durante el impacto de meteoritos (en mis talleres presenciales me gusta llevar una muestra de moldavita engarzada en joyería para hablar del impacto de meteoritos). Las famosas detonaciones de las primeras bombas nucleares en el desierto de Chihuahua también produjeron cuasicristales, que hasta este siglo estamos reconociendo.

### Conjetura de Kepler

Como toda buena historia en la que se ven involucrados aquellos primeros científicos y protocientíficos, este relato comienza con un rey y su polímata de cabecera intentando resolver algún problema práctico (encomendado por su noble y adinerado mecenas). La pregunta en cuestión fue, ¿cuál es la mejor forma de acomodar bolas de cañón ocupando el menor espacio posible?



Kepler publicó una respuesta en su libro de 1611, pero la prueba matemática formal llegaría hasta 1998 (y su aceptación completa hasta 2014). El arreglo que mejor logra acomodar esferas en el espacio deja apenas poco menos de un 26 % de espacio vacío y equivale al arreglo de celda conocido como “cúbico centrado en las caras” [5].

Thomas C. Hales fue el matemático que logró la titánica proeza (tan grande, que estuvo incluida entre los famosos problemas propuestos por David Hilbert). Su éxito y reconocimiento lo encausó, entre otras cosas, a financiar la beca de oportunidad anual para lesbianas, gays, bisexuales, trans y personas queer (que no cuentan con una identidad sexopolítica específica) de la Universidad del valle de Utah en su pueblo natal, “para dar a estos estudiantes más esperanza y oportunidad”, como me escribió en un correo electrónico cuando le pregunté al respecto. Yo dediqué este taller a la memoria de las personas trans y trabajadoras sexuales que perdieron la vida en la pandemia del Covid-19, cuando hice su presentación en la Noche de las Estrellas 2021 para la sede de Morelia, Michoacán, coordinado por el IRyA. La grabación completa puede consultarse en las redes sociales de este instituto de la UNAM [4], en donde también recomiendo la obra de teatro científica *La desobediencia de Marte*, sobre Johannes Kepler.





## Principio precautorio

Pasaron menos de diez años desde las investigaciones de Shechtman y ya se estaban reportando en la literatura científica las propiedades antiadherentes y de alta dureza (aunque algo frágiles) de aleaciones metálicas con estructura cuasicristalina [7]. Cinco años después, en 1998, ya estaban a la venta los sartenes antiadherentes Cybernnox, producidos por la compañía de origen francés Sitram, de utensilios de cocina. Estos duraron pocos años en el mercado. A la fecha estos sartenes están descontinuados y aunque existen patentes similares que son un tanto más recientes (como la CN210727482U de 2018, próxima a vencer en 2028 en China), sorprende lo poco que duró esta tecnología.

Los divulgadores científicos no podemos más que esperar que se haya tratado de un fracaso comercial por razones económicas y no por preocupaciones de salud a mediano plazo. Debemos recordar que los cuasicristales son nuevos materiales, nunca antes vistos por el organismo humano (como el plutonio) y que, por ende, no contamos con rutas metabólicas o mecanismos biológicos para procesarlos o desecharlos. No evolucionamos, como especies biológicas, en presencia de ellos y nuestro organismo no sabría reconocerlos ni qué hacer con

ellos. Esta es una consideración basada en el principio precautorio. En comparación, hemos satanizado a los cultivos transgénicos, edulcorantes y pesticidas por mucho, mucho, menos (incluso cuando ya han pasado la “prueba del tiempo” en muchas más generaciones que los recién llegados a escena cuasicristales).



## Referencias

1. Martínez Rosas, Astron Rigel. (2022). Talleres de arte y ciencia. Revista Materiales Avanzados del IIM-UNAM, 36 (1) p. 135-148.
2. Muller, Derek. (Veritasium en español). (26 de noviembre de 2020). Descubre el Patrón Infinito que NUNCA se Repite (archivo de video). Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=9N3u0D2RwY0&t=762s>
3. Cruz Nacipucha, Silvana Margarita. (2017). Incidencia de los recursos tecnológicos en la calidad del desarrollo del aprendizaje de la motricidad fina en los niños de 5 a 6 años (tesis de licenciatura). Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación, Universidad de Guayaquil, Ecuador.
4. Martínez, Astron. (IRyA UNAM). (12 de noviembre de 2021). Taller: Cuasicristales y la conjetura de Kepler Noche de las estrellas Morelia 2021 (video grabado en vivo). Facebook. <https://fb.watch/qOPfb4il4P/>
5. Grime, James. (Numberphile). (24 de septiembre de 2018). The Best Way to Pack Spheres – Numberphile (archivo de video). Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=CROelGfr3gs&t=7s>
6. Chernikov, A., et. Al. (1989). Symmetry and chaos. Computers Math. Applic, 17 (1-3) p. 17-32.
7. Rivier, N. (1993). Non-stick quasicrystalline coatings. Journal of Non-Crystalline Solids, 153-154 (1) p. 458-462.